

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.
Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

Le sujet comporte 3 exercices indépendants : un en algèbre et deux en analyse. Les deux premiers exercices sont plus simples et il est conseillé de les faire proprement.

1 Analyse : primitive d'une fonction gaussienne

Dans tout le problème, on note Φ la primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

- 1) Justifier que la fonction Φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- 2) Étudier les variations de Φ .
- 3) Étudier la parité de Φ .
- 4) **Étude en 0.**
 - a) Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction Φ' .
 - b) En déduire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ que l'on précisera telle que

$$\Phi(x) = x - \alpha x^3 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^3)$$

- c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\Psi(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$. Prouver que la fonction Ψ est prolongeable par continuité en 0. On convient de noter encore Ψ la fonction ainsi prolongée sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\Psi(0)$.
 - d) Démontrer que la fonction Ψ est dérivable sur \mathbb{R} , et préciser la valeur de $\Psi'(0)$.
 - e) Expliciter l'équation de la tangente à la courbe représentative de Ψ au point d'abscisse 0. Est-ce que Ψ admet un extremum local en 0 ?
- 5) **Résolution d'une équation différentielle.** On s'intéresse dans cette question à l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On exprimera les solutions à l'aide de la fonction Ψ .
- b) Pour chaque solution de (E) sur $]0, +\infty[$, déterminer sa limite en 0^+ .
- c) Résoudre de même l'équation (E) sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, et étudier pour chaque solution sa limite en 0^- .
- d) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution sur \mathbb{R} , et la déterminer.

6) Étude en $+\infty$.

a) Avec une majoration adéquate, établir que

$$\forall x \geq 1 \quad \Phi(x) \leq \Phi(1) + \int_1^x e^{-\frac{u}{2}} du$$

b) En déduire que Φ est majorée sur \mathbb{R} , puis que Φ admet une limite finie en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

2 Algèbre : l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit Δ l'application :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}$$

Par exemple, si $P = X^2$, alors $\Delta(P) = (X+1)^2 - X^2$.

1) Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) On souhaite déterminer $\text{Ker}(\Delta)$.

a) On fait l'hypothèse dans cette question que P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, appartenant à $\text{Ker}(\Delta)$.

i) Justifier que P admet au moins une racine complexe z_0 .

ii) En déduire que P possède une infinité de racines complexes et obtenir une contradiction.

b) En déduire $\text{Ker}(\Delta)$.

3) a) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. On note $d = \deg P$ et on pose $P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$. Préciser le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction de d .

b) Justifier que la restriction Δ_n de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer le noyau de Δ_n , puis le rang de Δ_n et en déduire l'image de Δ_n .

4) Montrer que Δ est un endomorphisme surjectif, mais pas injectif. En quoi ce n'est pas une contradiction ?

5) Utilisation de Δ_n pour le calcul d'une somme

On suppose dans cette question uniquement que $n = 4$. On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

a) Déterminer la matrice M_4 de Δ_4 dans la base \mathcal{C} .

b) Trouver cinq réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 vérifiant : $M_4 \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) En déduire, pour tout $m \in \mathbb{N}$, une expression factorisée de :

$$S_m = \sum_{k=0}^m k^3$$

3 Analyse : la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$

On note $f : x \mapsto \sin(x)$. On étudie la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

A — Nature de la suite (u_n)

- 1) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, on a $0 < \sin x < x$.
- 2) En déduire que $u_n \in]0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 4) En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

B — Équivalent de (u_n)

5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

6) En déduire que $\lim \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$.

7) Dans la suite du problème, on pose $a_n = \frac{1}{u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{k+1} - a_k \leq \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$$

b) Soit $n \geq N + 1$. Déduire de la question précédente un encadrement de a_n en fonction de a_N , n , N et ε .

c) En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

C — Développement asymptotique de (u_n)

8) Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$.

9) En déduire que $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3} + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour une constante $\beta > 0$ que l'on précisera.

10) On pose $b_n = a_n - \frac{n}{3}$ pour tout $n \geq 1$.

a) Déterminer un équivalent simple de $b_{n+1} - b_n$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On admet l'encadrement suivant, pour tout $n \geq N + 1$:

$$\ln \left(\frac{n}{N} \right) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln \left(\frac{n}{N} \right) + \frac{1}{N}$$

Montrer que $b_n \sim \frac{\ln n}{5}$.

c) En déduire un développement asymptotique à 2 termes de a_n , puis de u_n .

Fin du sujet

